DETERMINANTES DE UMA MATRIZ

Definição

- A toda matriz quadrada associa-se um número, denominado DETERMINANTE DA MATRIZ, que é obtido por meio de operações entre os elementos da matriz

- Representação:

  Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 1 & 4 & 3 \\ 6 & 1 & 7 \end{pmatrix}$, representa-se o determinante de A por:

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 1 & 4 & 3 \\ 6 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

Cálculo do determinante de matriz de ordem 1

- $|3| = 3$
- $|0| = 0$
- $|-5| = -5$
- $|\sqrt{3}| = \sqrt{3}$

- O determinante de uma matriz quadrada de ordem 1 é o próprio elemento da matriz

Cálculo do determinante de matriz de ordem 2

- $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$detA = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$(2 \cdot 4) - [(-3) \cdot (-1)] = 8 - 3 = 5$$

- O determinante de uma matriz quadrada de ordem 2 é obtido pela diferença entre os produtos dos elementos da diagonal principal e da diagonal secundária.

Cálculo do determinante de matriz de ordem 3

- $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow detA = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix}$
- $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{matrix}$

$-6 \quad 12 \quad 0 \qquad 10 \quad -8 \quad 0$

- O determinante de uma matriz quadrada de ordem 3 é obtido pela REGRA DE SARRUS:

1. Copiar ao lado da matriz, a primeira e a segunda colunas.
2. Somar os produtos dos elementos da diagonal principal e dos produtos dos elementos das outras filas na mesma direção e somar os produtos dos elementos da diagonal secundária e dos elementos das filas da mesma direção.

$$10 - 8 + 0 = 2 \quad e \quad -6 + 12 + 0 = 6$$

3. Subtrair as somas dos produtos obtidos.

$$2 - 6 = -4$$

64. Calcule, no caderno, os determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 7 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} -\frac{2}{5} \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}$

f) $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -8 & -7 \end{vmatrix}$

65. Determine, em seu caderno, o valor da expressão:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}$$

66. Resolva as equações no caderno:

a) $\begin{vmatrix} x & x+1 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} x & 2 \\ x+2 & 3x+1 \end{vmatrix} = 0$

67. Aplicando a regra de Sarrus, calcule no caderno o valor dos determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 2 & -8 & 6 \\ 1 & -5 & 1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} a & 0 & a \\ 0 & c & 0 \\ b & 0 & b \end{vmatrix}$

68. Determine o valor de x que satisfaz cada equação:

a) $\begin{vmatrix} x & 3 & x \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix} = 5$

b) $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ x & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3x & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6$

c) $\dfrac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ x & x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ x+2 & 2x \end{vmatrix}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

69. Resolva, em $\mathbb{R}$, a desigualdade:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ x & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} > \begin{vmatrix} 2x+3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

70. Dadas as matrizes

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, calcule:

a) o determinante da matriz $X = A + B + C$

b) o determinante da matriz $X = (A - B) \cdot C$

c) o determinante de A^2 (sendo $A^2 = A \cdot A$)

d) o determinante de B^t

e) o determinante de $(A - C)^t$

71. Aplicando a relação fundamental da Trigonometria, calcule o determinante: $\begin{vmatrix} 1 & \text{sen } x \\ \text{sen } x & 1 \end{vmatrix}$ $\cos^2 x$

72. Seja a matriz $A = (a_{ij})$, quadrada e de ordem 3, em que $a_{ij} = i \cdot j + 2 \cdot i$ para todo a_{ij}, calcule det A. 0

73. Dadas as matrizes

$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, calcule, no caderno:

a) det $(A \cdot B)$ 20
b) det $(B \cdot A)$ 20
c) det $A \cdot$ det B 20

74. Dadas as matrizes

$A = (2)$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$,

calcule em seu caderno:

a) det A 2
b) det B 5
c) det C −1
d) det A^t 2
e) det B^t 5
f) det C^t −1

75. Dadas as matrizes

$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$, calcule em seu caderno:

a) det $(A + B)$ −12
b) det A^t + det B^t −22
c) det $(3 \cdot A)$ −225
d) det A + det B −22
e) det $(A + B)^t$ −12
f) det $(A^t)^t$ −25

76. Dados

$X = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}$, $Y = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ e $Z = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 10 \end{vmatrix}$,

calcule o número real $A = X^2 - 2 \cdot Y + \dfrac{Z}{2}$. 4

77. Determine, no seu caderno, os valores de x para que o determinante $\begin{vmatrix} 1 & x \\ -x & 2x \end{vmatrix}$ seja nulo. 0 ou −2

78. Determine as condições de x para que o determinante $\begin{vmatrix} 1 & x & -3 \\ 0 & 5 & -1 \\ x & -14 & 0 \end{vmatrix}$ seja um número real positivo.
$x \in \mathbb{R}$ e $1 < x < 14$

79. Sabendo que $\begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ y & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 5$, e que

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 0$, calcule os valores de x e y.

$x = -1$ e $y = 7$

80. Seja a matriz $A = (a_{ij})$, quadrada de ordem 3, em que $a_{ij} = \begin{cases} 2 \cdot i \cdot j, \text{ se } i = j \\ i + j, \text{ se } i \neq j \end{cases}$. Calcule o det A^t. 68

81. Dados os determinantes A e B, calcule o valor de x de modo que det $A = -$det B. $\frac{1}{6}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & 1 & 2 \\ -x & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 1 & -x & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

82. Em cada item, depois de calcular os determinantes, responda às questões. Essa atividade pode ser feita em grupo.

a) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$ 0

O determinante de uma matriz de ordem 3 com uma linha de zeros sempre vale zero? sim

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \\ d & e & f \end{vmatrix}$ 0

O determinante de uma matriz de ordem 3 em que uma linha é "o dobro de outra linha" sempre vale zero? E se fosse o triplo? sim, sim

c) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3a & 3b \\ c & d \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} a & 3b \\ c & 3d \end{vmatrix}$ $ad - bc$; $3 \cdot (ad - bc)$; $3 \cdot (ad - bc)$

Se o determinante de uma matriz de ordem 2 tem uma fila (ou linha ou coluna) triplicada, seu valor triplica? sim

d) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ $ad - bc$; $ad - bc$

O determinante de uma matriz de ordem 2 e o de sua transposta são iguais? sim

e) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}$ $ad - bc$; $-(ad - bc)$; $-(ad - bc)$

Determinantes de matrizes de ordem 2 que têm linhas (ou colunas) permutadas são iguais ou opostos? opostos

f) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$ abc

O determinante de uma matriz diagonal de ordem 3 é sempre igual ao produto dos elementos da diagonal principal? sim

83. Calcule, no caderno, os determinantes de I_1, I_2 e ... Qual valor você imagina para o determinante d...

1, 1, 1. Espera-se que os alunos respondam que o determinante de I_n é igual a 1.